20/02/19

<u>πχ:</u> $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$\mathbb{Z}_6[x]$

$f(x) = \bar{2}x + \bar{1}$ $\quad g(x) = \bar{3}x + \bar{1}$ $\quad deg(fg) = 2$

$f(x)g(x) = (\bar{2}x + \bar{1})(\bar{3}x + \bar{1}) =$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Το $g(x)$ <u>διαιρεί</u> το $f(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $h(x)$ ώστε $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

• **ΘΕΩΡΗΜΑ:** <u>Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμου</u>

Δοθέντων 2 μη-μηδενικών πολυωνύμων $f(x)$ κ' $g(x)$, υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ κ' $u(x)$ ώστε $\boxed{f(x) = \pi(x)g(x) + u(x)}$ και $deg\,u < deg\,g$ ή $u(x) = 0$

<u>πχ:</u> Να εφαρμοστεί η ευκλείδεια διαίρεση στα πολυώνυμα:

$f(x) = 9x^6 + 4x^3 + 1$ κ' $g(x) = x^3 + 2x + 3$

$$
\begin{array}{l|l}
9x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^3 + 2x + 3 \\ \hline
-\cancel{9x^6} \quad -18x^4 - 27x^3 & 9x^3 - 18x - 23 = \pi(x) \\
\quad -\cancel{18x^4} - 23x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & \\
\quad \cancel{18x^4} \quad + 36x^2 + 54x & \\
\quad\quad -\cancel{23x^3} + 36x^2 + 54x + 1 & \\
\quad\quad \cancel{23x^3} \quad + 46x + 69 & \\
\quad\quad\quad 36x^2 + 100x + 70 & = u(x)
\end{array}
$$

Άρα $f(x) = g(x) \cdot \pi(x) + u(x)$ κ' επειδή το $u(x) \neq 0$ το $f(x)$ δεν είναι πολλαπλάσιο του $g(x)$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Ένα μη σταθερό πολυώνυμο f(x) θα καλείται ανάγωγο αν δεν μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ με $\deg g, \deg h < \deg f$

! **ΠΡΟΣΟΧΗ:** 1) $f(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$ Δεν είναι ανάγωγο

2) $f(x)=x^2+1=(x+1)(x-i)$ είναι ανάγωγο αν είμαστε στο

Άρα προσέχω σε ποιο σώμα βρισκόμαι

3) $f(x)=x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ είναι ανάγωγο αν είμαστε $\mathbb{R}\setminus$ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

!!! ⇒ Άρα ένα πολυώνυμο μπορεί να είναι ανάγωγο σε κάποιο σώμα και να μην είναι σε κάποιο άλλο.

• **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω $f(x)\in\mathbb{R}[x]$. Τότε το f(x) είτε θα είναι ανάγωγο ή θα γράφεται σαν γινόμενο αναγώγων

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Το $a\in\mathbb{R}$ καλείται ρίζα του πολυωνύμου f(x) αν ισχύει $f(a)=0$.

• **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Το $a\in\mathbb{R}$ είναι ρίζα του f(x) αν-ν $f(x)=(x-a)g(x)$, δηλ αν το f(x) είναι πολλαπλάσιο του $(x-a)$

• **Βασικό πρόβλημα της άλγεβρας:**
Να γραφεί ένα πολυώνυμο f(x) σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων, αν γράφεται.

πχ: Το x^2+1 δεν γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων στο $\mathbb{R}$.

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω ότι το a είναι ρίζα του f(x). Λέγεται ότι η ρίζα a έχει πολλαπλότητα τον $k\in\mathbb{N}$ αν $f(x)=(x-a)^k g(x)$ και το f(x) δεν είναι πολλαπλάσιο του $(x-a)^{k+1}$.

πχ: Βρείτε τις ρίζες των $f(x)=x^3-x^2+2x-2$ & $g(x)=x^3-2$ εξετάζοντας τους διαιρέτες των σταθερών όρων.

$g(x)$: $\pm 1, \pm 2$ $\quad g(1)\neq 0 \quad g(-1)\neq 0, \quad g(2)\neq 0 \quad g(-2)\neq 0$

$f(x)$: $\pm 1, \pm 2$ $\quad f(1)=0 \quad f(-1)\neq 0 \quad f(2)\neq 0 \quad f(-2)\neq 0$

Άρα $f(x)=(x-1)\cdot g(x)$ γιατί:

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3}-\cancel{x^2}+2x-2 & x-1 \\
\cline{2-2}
-\cancel{x^3}+\cancel{x^2} \qquad\qquad & x^2+2 \\
\hline
2\cancel{x}-2 & \\
-2\cancel{x}+2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

- **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν $f(x)\in \mathbb{F}[x]$ με $\mathbb{F}$ σώμα και έχει βαθμό n, τότε το $f(x)$ θα έχει το πολύ n ρίζες.

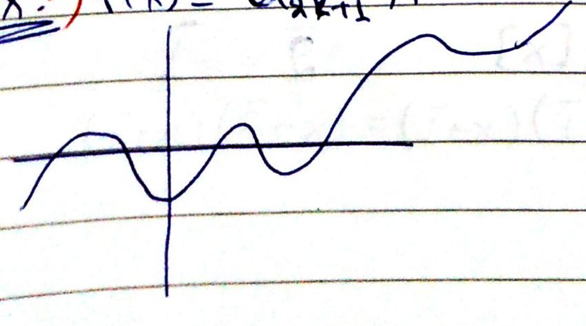
- **ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**

Ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει ακριβώς τόσες ρίζες όσο και ο βαθμός του όταν προσμετράται και η πολλαπλότητα της κάθε ρίζας

πχ: 1) $f(x)=(x+2)^2\cdot(x-1)^3$: ρίζες 1 & -2, το 1 με πολλαπλότητα 3 & το -2 με πολλαπλότητα 2.

πχ: 2) $f(x)=x^4+3x^2+2$ δεν έχει πραγματικές ρίζες γιατί:
$f(x)=x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$

πχ: 3) $f(x)=a_{2k+1}x^{2k+1}+\dots+a_0 = a_{2k+1}\underbrace{\left(x^{2k+1}+\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}x^{2k}+\dots+\frac{a_0}{a_{2k+1}}\right)}_{h(x)\ \text{συνεχής}}$



No. Date

• ΠΡΟΤΑΣΗ: Τα περιττού βαθμού πολυώνυμα έχουν τουλάχιστον 1 ρίζα πραγματική.

πχ: 1) $f(x)=x^4-7x^3+18x^2-20x+8$. Να βρεθούν ρίζες και οι πολλαπλότητες.

$f(x): \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

$f(1)=1-7+18-20+8=0$

$f(-1)=1+7+18+20+8=54 \neq 0$

$f(2)=16-56+72-40+8=0$

$f(-2)=16+56+72+40+8=190 \neq 0$

$f(4) \neq 0$, $f(-4) \neq 0$, $f(8) \neq 0$, $f(-8) \neq 0$

Άρα $f(x)=(x-1)(x-2)g(x)=(x^2-3x+2)g(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^4}-7x^3+18x^2-20x+8 & x^2-3x+2 \\
\cline{2-2}
-\cancel{x^4}+3x^3-2x^2 & x^2-4x+4 \\
\cline{1-1}
\quad -4\cancel{x^3}+16x^2-20x+8 & \\
\quad\ \ 4\cancel{x^3}-12x^2+8x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 4\cancel{x^2}-\cancel{12x}+\cancel{8} & \\
\qquad\ -4\cancel{x^2}+\cancel{12x}-\cancel{8} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Άρα $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-4x+4)=(x-1)(x-2)(x-2)^2=$
$=(x-1)(x-2)^3$

Άρα ρίζες: 1 με πολλαπλότητα 1 ή
2 με — " — " — 3

πχ: 2) $f(x)=x^2+2$ όχι πραγματικές ρίζες.

3) $f(x)=x^2+\bar{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$ $\quad \bar{2}=-\bar{1}$

$x^2+\bar{2}=x^2-\bar{1}=(x-\bar{1})(x+\bar{1})=(x+\bar{2})(x+\bar{1})$

No. Date

• ΕΡΩΤΗΜΑ: Ποιά είναι τα ανάγωγα πολυώνυμα στον $\mathbb{R}[x]$;

Δεν μπορώ να βρω όλα. Αλλά θα τα περιγράψω:

- Όλα τα πρωτοβάθμια
- Υπάρχουν δευτεροβάθμια

Ελέγχω για τα τεταρτοβάθμια:

$x^4+1=(x^2+ax+\beta)(x^2+\gamma x+\delta)$

$x^4+(\gamma+a)x^3+(\delta+\beta+a\gamma)x^2+(\beta\gamma+a\delta)x+\beta\delta$

$\gamma+a=0 \Rightarrow \gamma=-a$ $\quad\delta+\beta+a\gamma=0 \Rightarrow \delta=-\beta+a^2$

$\beta\gamma+a\delta=0 \Rightarrow \beta(-a)+a(-\beta+a^2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -a\beta-a\beta+a^3=0 \Rightarrow \boxed{a^3-2a\beta=0}$

$\beta\delta=1 \Rightarrow \beta(-\beta+a^2)=\boxed{-\beta^2+a^2\beta=1}$

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ και να έχει ρίζα τον μιγαδικό z

$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$

$f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0=0$

$\bar{z}^n+\bar{a}_{n-1}\bar{z}^{n-1}+\dots+\bar{a}_1\bar{z}+\bar{a}_0=0 \qquad f(\bar{z})=0$

Αν το z είναι ρίζα, τότε και ο $\bar{z}$ είναι ρίζα.

$f(x)=\underbrace{(x-z)(x-\bar{z})}_{\text{πραγματικός}}\, \underset{\text{πραγματικός}}{g(x)}$

$(x-z)(x-\bar{z})=x^2-\underset{\text{πραγματ.}}{(z+\bar{z})}x+\underset{\text{πραγματ.}}{z\bar{z}}$

Το τυχαίο $f(x)$ θα είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων μιγαδικών πολυωνύμων: $f(x)=(x-z_1)(x-\bar{z}_1)(x-z_2)(x-\bar{z}_2)\dots(x-z_n)(x-\bar{z}_n)$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ - ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$A_{n\times n}$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Υπάρχουν αριθμοί λ κ' u διάνυσμα $u \neq \vec{0}$ ώστε

$$\boxed{\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{u} = \lambda u}$$

Αν υπάρχει τέτοιος λ θα καλείται ιδιοτιμή του u και το u ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν το u είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή το λ, $Au = \lambda u$, τότε και κu με $\kappa \neq 0$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα

$Au = \lambda u \Rightarrow \kappa A u = \kappa \lambda u \Rightarrow A(\kappa u) = \lambda(\kappa u)$

Πώς θα βρω τα αν υπάρχουν;

Υποθέτω ότι υπάρχει αριθμός λ κ' διάνυσμα u με $u \neq \vec{0}$, με

$Au = \lambda u \Rightarrow Au - \lambda u = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{(A-\lambda I)}_{B_{n\times n}} u = \vec{0}$

$$\left.\begin{matrix} u \neq \vec{0} \\ Bu = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u \in \ker B \Leftrightarrow \det B = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ

Δηλαδή οι ζητούμενες ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $\boxed{\det(A-\lambda I)}$, το οποίο καλείται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.

ΕΡΩΤΗΜΑ:
1) Έχει πραγματικές ρίζες;
2) Πώς θα τις βρω αν υπάρχουν;
3) Αν βρω μια ιδιοτιμή (ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) πώς θα βρω το ιδιοδιάνυσμα u;

Η ορίζουσα $\det(A-\lambda I)$ συμβολίζεται με $\boxed{X_A(\lambda)}$

πχ: $A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$. Να βρεθούν ιδιοτιμές & ιδιοδιανύσματα αν υπάρχουν.

$$X_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(4-\lambda)(-3-\lambda)-2\cdot(-5)=-12-4\lambda+3\lambda+\lambda^2+10=$$

$$=\lambda^2-\lambda-2= \qquad \Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$$

$$=(\lambda-2)(\lambda+1) \qquad \lambda=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2} \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=-1\end{cases}$$

θέλω u_1 ώστε $Au_1=-u_1 \Leftrightarrow Au_1+u_1=\bar{0} \Rightarrow (A+I)u_1=\bar{0}$ (1)

και u_2 ώστε $Au_2=2u_2 \Leftrightarrow Au_2-2u_2=\bar{0} \Rightarrow (A-2I)u_2=\bar{0}$ (2)

(1) $\Rightarrow u_1\in\ker(A+I) \to (A+I)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ομογενές $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}5 & -5\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x-5y\\ 2y-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}5x-5y&=0\\ 2x-2y&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=y$$

$u_1=(x,x)=x(1,1)$

$$A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=2$

$$(2)\Rightarrow(A-2I)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & -5\\ 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x=5y \Rightarrow x=\frac{5}{2}y$

$u_2=\left(\frac{5}{2},1\right)$ ή $(5,2)$

Βρήκα $\lambda_1=-1$ & $u_1=(1,1)$ & $\lambda_2=2$ & $u_2=(5,2)$

$\langle(1,1),(5,2)\rangle=\mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2_{καν} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathbb{R}^2_{καν} \\
\mathbb{R}^2_{νέα} \arrow[r, "?", "A'"'] & \mathbb{R}^2_{νέα} \arrow[u, "P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

No. Date

Πχ: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές & τα ιδιοδιανύσματα

$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)-(-1)\cdot 2 =$

$= -1-\cancel{\lambda}+\cancel{\lambda}+\lambda^2+2 = \underline{\lambda^2+1}$

Ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, αλλά έχει μιγαδικές.